

CSCA December 2025

Полный разбор заданий

1. If sets $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, then

- A. $B \in A$
- B. $A = B$
- C. $A \in B$
- D. $A \subseteq B$**

Правильный ответ: **D**

Объяснение:

Знак $\subseteq$ читается как «является подмножеством».

$A = \{1, 2\}$ — все его элементы (1 и 2) присутствуют в $B = \{1, 2, 3\}$.

Следовательно, $A \subseteq B$.

Почему другие варианты неверны:

$B \in A$ — неверно: $\in$ означает «является элементом», но B — это множество, а не элемент A .

$A = B$ — неверно: множества содержат разное количество элементов.

$A \in B$ — неверно: A — множество, а не элемент B .

2. If sets $A = (-1,3)$, $B = [2,4)$, then $A \cap B =$

- A. $[2, 3]$
- B. $[2, 3)$**
- C. $(2, 3]$
- D. $(2, 3)$

Правильный ответ: **B**

Объяснение:

$A = (-1, 3)$ — открытый интервал: концы -1 и 3 не включены.

$B = [2, 4)$ — полуоткрытый: 2 включено, 4 не включено.

Пересечение $A \cap B$ — общая часть двух интервалов:

Левая граница: $\max(-1, 2) = 2$.

Точка 2 входит в B (закрытая граница $[2)$ и входит в A (так как $2 > -1$).

Поэтому левая граница закрытая: $[2$.

Правая граница: $\min(3, 4) = 3$.

Точка 3 не входит в A (открытая граница $3)$).

Поэтому правая граница открытая: $3)$.

Итог: $A \cap B = [2, 3)$.

3. The solution set of the quadratic inequality $x^2 - 5x + 4 < 0$ is

- A. $(-4, -1)$
- B. $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$
- C. $(-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$
- D. $(1, 4)$**

Правильный ответ: **D**

Объяснение:

Решаем $x^2 - 5x + 4 < 0$.

Шаг 1. Находим корни уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$:

$$D = 25 - 16 = 9, \sqrt{D} = 3.$$

$$x_1 = (5 - 3) / 2 = 1, \quad x_2 = (5 + 3) / 2 = 4.$$

Шаг 2. Парабола открыта вверх (коэффициент при x^2 равен $+1$).

Квадратный трёхчлен отрицателен МЕЖДУ корнями.

Ответ: (1, 4).

4. The domain of the function $y = 1/\sqrt{x+1}$ is

A. $[-1, +\infty)$

B. $(-1, +\infty)$

C. $(0, +\infty)$

D. $(-\infty, -1)$

Правильный ответ: **B**

Объяснение:

Функция $y = 1/\sqrt{x+1}$ определена при двух условиях:

1) Подкоренное выражение неотрицательно: $x + 1 \geq 0$.

2) Знаменатель не равен нулю: $\sqrt{x+1} \neq 0$, то есть $x + 1 \neq 0$.

Объединяя: $x + 1 > 0 \implies x > -1$.

Точка -1 исключена (знаменатель обращается в ноль).

Ответ: $(-1, +\infty)$ — открытый интервал.

5. If $\{a_n\}$ is an arithmetic sequence with first term $a_1 = 2$ and common difference $d = 3$, then $a_{100} =$

A. 302

B. 305

C. 299

D. 298

Правильный ответ: **C**

Объяснение:

Формула n -го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Подставляем $n = 100$, $a_1 = 2$, $d = 3$:

$$a_{100} = 2 + (100 - 1) \cdot 3$$

$$= 2 + 99 \cdot 3$$

$$= 2 + 297$$

$$= 299.$$

6. The point $(-1, 3 - \pi)$ lies in the ____ quadrant of the Cartesian coordinate system.

A. third

B. first

C. second

D. fourth

Правильный ответ: **A**

Объяснение:

Определяем знаки координат точки $(-1, 3 - \pi)$:

$$x = -1 < 0.$$

$$y = 3 - \pi \approx 3 - 3,1416 \approx -0,1416 < 0.$$

Оба значения отрицательны:

$x < 0$ и $y < 0$ — это третий квадрант.

Напоминание о квадрантах:

I: $x > 0, y > 0$. II: $x < 0, y > 0$.

III: $x < 0, y < 0$. IV: $x > 0, y < 0$.

7. $(\sin \pi/4 + \cos \pi/4) \times \tan \pi/4 =$

A. $2\sqrt{2}$

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. 1

Правильный ответ: C

Объяснение:

Вычислим значения тригонометрических функций:

$$\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \quad \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \quad \tan(\pi/4) = 1.$$

Подставляем:

$$(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2) \times 1$$

$$= (2\sqrt{2}/2) \times 1$$

$$= \sqrt{2}.$$

8. Which of the following functions is an odd function?

A. $y = x \cdot \sin x$

B. $y = x^4$

C. $y = \cos x$

D. $y = x + x^3$

Правильный ответ: D

Объяснение:

Нечётная функция: $f(-x) = -f(x)$ для всех x из области определения.

Проверяем вариант D: $f(x) = x + x^3$.

$$f(-x) = (-x) + (-x)^3 = -x - x^3 = -(x + x^3) = -f(x). \quad \checkmark$$

Остальные варианты:

A: $y = x \cdot \sin x$. $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x \cdot \sin x = f(x)$ — чётная.

B: $y = x^4$. $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$ — чётная.

C: $y = \cos x$ — чётная функция.

9. The inverse function of $y = x^3$ is

A. $y = x/3$

B. $y = 3^x$

C. $y = x^3$

D. $y = \sqrt[3]{x}$

Правильный ответ: D

Объяснение:

Находим обратную функцию к $y = x^3$:

Выражаем x через y : если $y = x^3$, то $x = y^{1/3} = \sqrt[3]{y}$.

Меняем обозначения: обратная функция — $y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$.

Ответ: $y = \sqrt[3]{x}$ (кубический корень из x).

10. Which of the following functions is monotonically increasing?

- A. $y = (1/3)^x$
- B. $y = \log_{0.5} x$
- C. $y = 2x + 1$**
- D. $y = \sin x$

Правильный ответ: C

Объяснение:

Анализируем каждый вариант:

A: $y = (1/3)^x$ — показательная функция с основанием $1/3 < 1 \Rightarrow$ убывает.

B: $y = \log_{0.5} x$ — логарифм с основанием $0.5 < 1 \Rightarrow$ убывает.

C: $y = 2x + 1$ — линейная функция с наклоном $2 > 0 \Rightarrow$ возрастает. ✓

D: $y = \sin x$ — не монотонна на всей области определения (периодическая).

Ответ: C.

11. Which point lies in the third quadrant?

- A. $(-1, -2)$**
- B. $(-1, 2)$
- C. $(1, 2)$
- D. $(1, -2)$

Правильный ответ: A

Объяснение:

Третий квадрант: $x < 0$ и $y < 0$.

A: $(-1, -2)$ — $x = -1 < 0$, $y = -2 < 0 \Rightarrow$ третий квадрант. ✓

B: $(-1, 2)$ — $x < 0$, $y > 0 \Rightarrow$ второй квадрант.

C: $(1, 2)$ — $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow$ первый квадрант.

D: $(1, -2)$ — $x > 0$, $y < 0 \Rightarrow$ четвертый квадрант.

12. The solution set of the rational inequality $(x-1)/(x-2) \leq 1$ is

- A. $(2, +\infty)$
- B. $[1, 2]$
- C. $(-\infty, 2)$**
- D. $(-\infty, 1]$

Правильный ответ: C

Объяснение:

Решаем $(x-1)/(x-2) \leq 1$.

Шаг 1. Переносим 1 в левую часть:

$$(x-1)/(x-2) - 1 \leq 0$$

$$[(x-1) - (x-2)] / (x-2) \leq 0$$

$$[x-1-x+2] / (x-2) \leq 0$$

$$1 / (x-2) \leq 0.$$

Шаг 2. Дробь $1/(x-2) \leq 0$ тогда и только тогда, когда знаменатель отрицателен:

$$x - 2 < 0 \implies x < 2.$$

Ответ: $(-\infty, 2)$. Точка $x = 2$ исключена (знаменатель = 0).

13. Given that a , b , and c form an arithmetic sequence and satisfy $a + c = 20$, then $b =$

A. 10

B. 5

C. 20

D. 0

Правильный ответ: A

Объяснение:

В арифметической прогрессии a, b, c выполняется свойство:

$$b = (a + c) / 2 \quad (b \text{ — среднее арифметическое крайних членов}).$$

Подставляем: $b = 20 / 2 = 10$.

14. The inclination angle of the line $y = \sqrt{3} \cdot x + 10$ is

A. 60°

B. 30°

C. 45°

D. 120°

Правильный ответ: A

Объяснение:

Угол наклона α прямой $y = kx + b$ определяется через наклон $k = \tan(\alpha)$.

Здесь $k = \sqrt{3}$.

$$\tan(\alpha) = \sqrt{3} \implies \alpha = 60^\circ.$$

(При $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ)$, $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$.)

15. Which of the following inequalities is correct?

A. $0,75^{(-0,2)} > 0,75^{(-0,4)}$

B. $3^{4,5} > 3^5$

C. $2,1^{(-2)} > 1,2^{(-2)}$

D. $2,1^{(2/3)} > 1,2^{(2/3)}$

Правильный ответ: D

Объяснение:

Проверяем каждый вариант:

A: $0,75^{(-0,2)}$ vs $0,75^{(-0,4)}$. Основание $0,75 < 1 \implies$ функция убывает.

$-0,2 > -0,4$, поэтому $0,75^{(-0,2)} < 0,75^{(-0,4)}$. A неверно.

B: $3^{4,5}$ vs 3^5 . Основание $3 > 1 \implies$ функция возрастает.

$4,5 < 5$, поэтому $3^{4,5} < 3^5$. B неверно.

C: $2,1^{(-2)}$ vs $1,2^{(-2)}$. $f(x) = x^{(-2)} = 1/x^2$ убывает для $x > 0$.

$2,1 > 1,2 \implies 2,1^{(-2)} < 1,2^{(-2)}$. C неверно.

D: $2,1^{(2/3)}$ vs $1,2^{(2/3)}$. $f(x) = x^{(2/3)}$ возрастает для $x > 0$.

$2,1 > 1,2 \implies 2,1^{(2/3)} > 1,2^{(2/3)}$. D верно. ✓

16. If point $P(1, y)$ lies on the terminal side of angle α and $\tan \alpha = 2$, then $y =$

- A. 1
- B. $1/2$
- C. $\sqrt{3}$
- D. 2

Правильный ответ: D

Объяснение:

Точка $P(1, y)$ лежит на терминальной стороне угла α .

По определению тангенса:

$$\tan(\alpha) = y / x = y / 1 = y.$$

Дано $\tan(\alpha) = 2$, следовательно $y = 2$.

17. Given that $\{a_n\}$ is an arithmetic sequence, and $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, then $a_{2025} =$

- A. 2
- B. 2025
- C. 2024
- D. 20

Правильный ответ: B

Объяснение:

Находим разность прогрессии:

$$d = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1.$$

Общая формула: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + (n - 1) \cdot 1 = n$.

Подставляем $n = 2025$:

$$a_{2025} = 2025.$$

18. If the center coordinates of a circle are $(-3, 2)$ and its radius is 4, then the equation of the circle is

- A. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$
- B. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$
- C. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$
- D. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$

Правильный ответ: D

Объяснение:

Стандартное уравнение окружности с центром (a, b) и радиусом r :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Центр $(-3, 2)$, $r = 4$:

$$(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16.$$

19. Given $\sin \alpha = 3/5$, and α is in the second quadrant, then $\cos \alpha =$

- A. $4/5$
- B. $-4/5$
- C. $3/4$
- D. $-3/4$

Правильный ответ: В

Объяснение:

Используем основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - (3/5)^2 = 1 - 9/25 = 16/25.$$

$$\cos \alpha = \pm 4/5.$$

Во втором квадранте косинус отрицателен:

$$\cos \alpha = -4/5.$$

20. The domain of the function $y = \sqrt{x-1}$ is

A. $[1, +\infty)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, 1]$

D. $(-\infty, 1)$

Правильный ответ: A

Объяснение:

Функция $y = \sqrt{x-1}$ определена, когда подкоренное выражение неотрицательно:

$$x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1.$$

Ответ: $[1, +\infty)$ — закрытый интервал, точка 1 включена.

21. Given the circle equation $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$, then the radius of this circle is

A. 2

B. $1/2$

C. $\sqrt{2}$

D. 1

Правильный ответ: C

Объяснение:

Приводим уравнение к стандартному виду, выделяя полный квадрат:

$$x^2 + 2x + y^2 - 2y = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0 + 1 + 1$$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Центр: $(-1, 1)$, радиус $r = \sqrt{2}$.

22. If α is an acute angle, and $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$, then $\tan \alpha =$

A. $1/2$

B. $\sqrt{3}$

C. $1/4$

D. $\sqrt{3}/3$

Правильный ответ: B

Объяснение:

$\sin \alpha = \sqrt{3}/2$ и α — острый угол $\implies \alpha = 60^\circ$.

$$\cos(60^\circ) = 1/2.$$

$$\tan(60^\circ) = \sin(60^\circ) / \cos(60^\circ) = (\sqrt{3}/2) / (1/2) = \sqrt{3}.$$

23. Given that the first three terms of a geometric sequence $\{a_n\}$ are 1, 2, and 4, then the general formula of this sequence is

- A. $a_n = 2n$
- B. $a_n = 8$
- C. $a_n = 2^{(n-1)}$
- D. $a_n = 2^n$

Правильный ответ: C

Объяснение:

Находим знаменатель геометрической прогрессии:

$$q = a_2 / a_1 = 2 / 1 = 2.$$

Общая формула: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)} = 1 \cdot 2^{(n-1)} = 2^{(n-1)}$.

Проверка: $a_1 = 2^0 = 1$ ✓, $a_2 = 2^1 = 2$ ✓, $a_3 = 2^2 = 4$ ✓.

24. Given $a > b$, then

- A. $1/a < 1/b$
- B. $a^2 > b^2$
- C. $5^a > 5^b$
- D. $\sin a > \sin b$

Правильный ответ: C

Объяснение:

Проверяем каждый вариант при $a > b$:

A: $1/a < 1/b$ — неверно в общем случае. Пример: $a = -1$, $b = -2 \Rightarrow 1/(-1) > 1/(-2)$.

B: $a^2 > b^2$ — неверно. Пример: $a = 1$, $b = -2 \Rightarrow a^2 = 1 < 4 = b^2$.

C: $5^a > 5^b$. Функция 5^x с основанием $5 > 1$ строго возрастает.

$a > b \Rightarrow 5^a > 5^b$. ✓ Всегда верно.

D: $\sin a > \sin b$ — неверно, синус не монотонен на всём $\mathbb{R}$.

25. The distance from point P(-1, 2) to point Q(3, 1) is

- A. $\sqrt{17}$
- B. $\sqrt{13}$
- C. $\sqrt{5}$
- D. 5

Правильный ответ: A

Объяснение:

Формула расстояния между двумя точками:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Подставляем P(-1, 2) и Q(3, 1):

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (1 - 2)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{16 + 1} \\ &= \sqrt{17}. \end{aligned}$$

26. Which of the following statements about the function $y = (1/2)^x$ is correct?

- A. The function is symmetric about the origin.
- B. The function is symmetric about the x-axis.

C. The function is monotonically increasing.

D. The function is monotonically decreasing.

Правильный ответ: D

Объяснение:

Функция $y = (1/2)^x$ — показательная с основанием $1/2$.

Так как $0 < 1/2 < 1$, функция строго убывает на всей области определения.

A: Симметрия относительно начала координат — неверно (это не нечётная функция).

B: Симметрия относительно оси x — неверно.

C: Монотонно возрастает — неверно, так как основание меньше 1.

D: Монотонно убывает — верно. ✓

27. If $\sin \alpha = 1/4$, then $\cos 2\alpha =$

A. $-7/8$

B. $1/8$

C. $7/8$

D. $-1/8$

Правильный ответ: C

Объяснение:

Используем формулу двойного угла:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Подставляем $\sin\alpha = 1/4$:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 1 - 2 \cdot (1/4)^2 \\ &= 1 - 2 \cdot 1/16 \\ &= 1 - 1/8 \\ &= 7/8.\end{aligned}$$

28. The intersection point of the line $l_1: y = 2x + 1$ and the line $l_2: x + y + 1 = 0$ is

A. $(1/3, 2/3)$

B. $(2/3, 1/3)$

C. $(-1/3, -2/3)$

D. $(-2/3, -1/3)$

Правильный ответ: D

Объяснение:

Подставляем $y = 2x + 1$ в уравнение $l_2: x + y + 1 = 0$:

$$x + (2x + 1) + 1 = 0$$

$$3x + 2 = 0$$

$$x = -2/3.$$

Находим y :

$$y = 2 \cdot (-2/3) + 1 = -4/3 + 1 = -1/3.$$

Точка пересечения: $(-2/3, -1/3)$.

29. The coordinates of the foci of the hyperbola $x^2 - y^2 = 1$ are

A. $(\pm\sqrt{2}, 0)$

B. $(0, \pm 2)$

C. $(0, \pm\sqrt{2})$

D. $(\pm 2, 0)$

Правильный ответ: A

Объяснение:

Стандартная форма гиперболы: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

Здесь $a^2 = 1$, $b^2 = 1$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2$, $c = \sqrt{2}$.

Фокусы расположены на оси x (так как ось трансверсальная — горизонтальная).

Координаты фокусов: $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

30. $\log_2 32 + \log_{1/2} 32 =$

A. -5

B. 10

C. 0

D. 5

Правильный ответ: C

Объяснение:

Вычисляем каждое слагаемое:

$\log_2 32 = \log_2(2^5) = 5$.

$\log_{1/2} 32$: основание $1/2 = 2^{-1}$.

$\log_{1/2} 32 = \log_2(32) / \log_2(1/2) = 5 / (-1) = -5$.

Сумма: $5 + (-5) = 0$.

31. Regarding the function $y = \cos x$, which of the following statements is correct?

A. $\cos(x + \pi) = \cos x$

B. This function is an odd function

C. This function is monotonically increasing on the interval $[0, \pi]$

D. This function is a periodic function with period 2π

Правильный ответ: D

Объяснение:

A: $\cos(x + \pi) = -\cos x \neq \cos x$. Неверно.

B: $\cos(-x) = \cos x = f(x)$, значит $y = \cos x$ — чётная, не нечётная. Неверно.

C: На $[0, \pi]$ косинус убывает от 1 до -1 . Неверно.

D: Функция $\cos x$ периодична с периодом $T = 2\pi$. ✓ Верно.

32. Regarding the parabola $y^2 = 4x$, which of the following statements is correct?

A. It passes through the point $(-4, 4)$

B. Its axis of symmetry is $x = 0$

C. The coordinates of its focus are $(\pm 1, 0)$

D. The coordinates of its focus are $(1, 0)$

Правильный ответ: D

Объяснение:

Парабола $y^2 = 4x$ имеет стандартный вид $y^2 = 2px$, где $2p = 4 \implies p = 2$.

Фокус находится в точке $(p/2, 0) = (1, 0)$.

Проверяем варианты:

A: Проверим $(-4, 4)$: $4^2 = 4 \cdot (-4) \implies 16 = -16$. Неверно.

В: Ось симметрии — ось x ($y = 0$), а не $x = 0$. Неверно.

С: Фокус один, не два. Неверно.

Д: Фокус в $(1, 0)$. ✓ Верно.

33. Which of the following lines is perpendicular to line $l: x + y + 3 = 0$?

A. $y = -2x + 1$

B. $y = x + 3$

C. $y = 1 - x$

D. $y = 2x + 1$

Правильный ответ: B

Объяснение:

Находим наклон прямой $l: x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -x - 3$, наклон $k_1 = -1$.

Условие перпендикулярности: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

$(-1) \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = 1$.

Ищем прямую с наклоном 1:

В: $y = x + 3$ имеет наклон 1. ✓

34. Given $\cos \alpha = -1/2$, $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, then the value of $\sin(\alpha/2)$ is

A. $-\sqrt{3}/2$

B. $\sqrt{3}/2$

C. $1/2$

D. $-1/2$

Правильный ответ: B

Объяснение:

$\cos \alpha = -1/2$, $\alpha \in (\pi/2, \pi) \Rightarrow \alpha = 2\pi/3$.

Тогда $\alpha/2 = \pi/3 \in (\pi/4, \pi/2)$ — острый угол.

$\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

Альтернативно через формулу половинного угла:

$\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos \alpha) / 2 = (1 - (-1/2)) / 2 = (3/2) / 2 = 3/4$.

$\sin(\alpha/2) = \sqrt{(3/4)} = \sqrt{3}/2$.

Так как $\alpha/2 \in (\pi/4, \pi/2)$, значение положительное: $\sqrt{3}/2$.

35. Given $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\sin(\pi/6) = 1/2$, we can obtain $\cos(\pi/12) =$

A. $\sqrt{6}/4$

B. $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$

C. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$

D. $(1 + \sqrt{3})/4$

Правильный ответ: B

Объяснение:

Заметим: $\pi/12 = \pi/4 - \pi/6$.

Используем формулу косинуса разности:

$\cos(\pi/4 - \pi/6) = \cos(\pi/4) \cdot \cos(\pi/6) + \sin(\pi/4) \cdot \sin(\pi/6)$.

Подставляем значения:

$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$,

$$\begin{aligned}
 \sin(\pi/4) &= \sqrt{2}/2, \quad \sin(\pi/6) = 1/2. \\
 &= (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) \\
 &= \sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 \\
 &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4.
 \end{aligned}$$

36. Which of the following functions is identical to $y = |x|$?

- A. $y = \sqrt[3]{x^3}$
- B. $y = (\sqrt{x})^2$
- C. $y = x$
- D. $y = \sqrt{x^2}$

Правильный ответ: D

Объяснение:

Ищем функцию, совпадающую с $y = |x|$ по формуле и области определения.

A: $y = \sqrt[3]{x^3} = x$ для всех x . Область $(-\infty, +\infty)$, но значение равно x , а не $|x|$.

B: $y = (\sqrt{x})^2 = x$, но определена только при $x \geq 0$. Не совпадает с $|x|$.

C: $y = x$ — прямая, не равна $|x|$ при $x < 0$.

D: $y = \sqrt{x^2} = |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$. ✓

37. If α is an acute angle and $\cos \alpha = 1/2$, then $\sin(\alpha/2) =$

- A. $\pm\sqrt{3}/2$
- B. $\pm 1/2$
- C. $\sqrt{3}/2$
- D. $1/2$

Правильный ответ: D

Объяснение:

$\cos \alpha = 1/2$, α острый $\Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Тогда $\alpha/2 = 30^\circ$.

$\sin(30^\circ) = 1/2$.

Альтернативно через формулу:

$\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos \alpha)/2 = (1 - 1/2)/2 = 1/4$.

$\sin(\alpha/2) = 1/2$ (положительное, так как $\alpha/2 = 30^\circ$ острый).

38. Regarding the parabola $y^2 = -x$, its directrix equation is

- A. $x = 1/2$
- B. $x = -1/2$
- C. $x = 1/4$
- D. $x = -1/4$

Правильный ответ: C

Объяснение:

Парабола $y^2 = -x$: запишем в виде $y^2 = -4p \cdot x$, где $4p = 1 \Rightarrow p = 1/4$.

Ось симметрии — ось x ; парабола открыта влево.

Фокус: $(-p, 0) = (-1/4, 0)$.

Директриса — прямая, параллельная оси y :

$x = p = 1/4$.

Проверка: директриса всегда по другую сторону от фокуса относительно вершины.

39. Given $(\cos \alpha - \sin \alpha)/(\cos \alpha + \sin \alpha) = 1/3$, then $\tan \alpha =$

- A. 1/2
- B. 1/4
- C. 2/3
- D. 1/3

Правильный ответ: A

Объяснение:

Делим числитель и знаменатель на $\cos \alpha$:

$$(1 - \tan \alpha)/(1 + \tan \alpha) = 1/3.$$

Перемножаем крест-накрест:

$$3(1 - \tan \alpha) = 1(1 + \tan \alpha)$$

$$3 - 3\tan \alpha = 1 + \tan \alpha$$

$$2 = 4 \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = 1/2.$$

40. If a sequence $\{a_n\}$ satisfies $a_1 = 1$, $a_n = 1/(1 + 1/a_{n-1})$ ($n \geq 2$), then $a_{100} =$

- A. 50
- B. 1/100
- C. 1
- D. 100

Правильный ответ: B

Объяснение:

Вычислим первые несколько членов:

$$a_1 = 1.$$

$$a_2 = 1/(1 + 1/1) = 1/2.$$

$$a_3 = 1/(1 + 1/(1/2)) = 1/(1 + 2) = 1/3.$$

$$a_4 = 1/(1 + 1/(1/3)) = 1/(1 + 3) = 1/4.$$

Закономерность: $a_n = 1/n$.

Следовательно: $a_{100} = 1/100$.

41. Regarding the logarithmic function $y = \log_a x$, which of the following statements is correct?

- A. The domain of this function is $(-\infty, +\infty)$
- B. When $a > 1$, it is a monotonically decreasing function on its domain
- C. When $a > 1$, for any $x > 0$, $\log_a x > 1$ holds
- D. When $0 < a < 1$, it is a monotonically decreasing function on its domain

Правильный ответ: D

Объяснение:

Анализ вариантов:

A: Область определения $\log_a x$ — только $x > 0$, то есть $(0, +\infty)$. Неверно.

B: При $a > 1$ логарифм монотонно возрастает. Неверно.

C: При $a > 1$ и $0 < x < 1$: $\log_a x < 0 < 1$. Неверно в общем случае.

D: При $0 < a < 1$ логарифмическая функция монотонно убывает. ✓ Верно.

42. Regarding the ellipse $x^2/4 + y^2/20 = 1$, which of the following statements is correct?

- A. The coordinates of its foci are $(0, \pm 4)$
- B. The coordinates of its foci are $(\pm 4, 0)$
- C. Its vertices are $(\pm 4, 0)$ and $(0, \pm 20)$
- D. The lengths of its major and minor axes are 20 and 4, respectively

Правильный ответ: A

Объяснение:

Эллипс $x^2/4 + y^2/20 = 1$: $a^2 = 20$, $b^2 = 4$ ($a^2 > b^2 \Rightarrow$ большая ось вдоль y).

$$c^2 = a^2 - b^2 = 20 - 4 = 16, c = 4.$$

Фокусы на оси y : $(0, \pm 4)$. ✓

Проверяем другие варианты:

B: Фокусы на оси x — неверно (большая ось вдоль y).

C: Вершины: $(0, \pm\sqrt{20})$ и $(\pm\sqrt{4}, 0) = (0, \pm 2\sqrt{5})$ и $(\pm 2, 0)$, а не $(\pm 4, 0), (0, \pm 20)$.

D: Полуоси $a = \sqrt{20}$, $b = 2$; оси $2a = 2\sqrt{20}$ и $2b = 4$. Неверно.

44. If a line is perpendicular to the line $l_1: x + 2y + 4 = 0$, and passes through the intersection point of the lines $l_2: x + y + 1 = 0$ and $l_3: 2x + y - 1 = 0$, then the equation of l is

- A. $x + 2y - 3 = 0$
- B. $2x + y - 5 = 0$
- C. $2x - y - 7 = 0$
- D. $x - 2y - 1 = 0$

Правильный ответ: C

Объяснение:

Шаг 1. Находим точку пересечения l_2 и l_3 :

$$l_2: x + y + 1 = 0 \Rightarrow x + y = -1.$$

$$l_3: 2x + y - 1 = 0 \Rightarrow 2x + y = 1.$$

$$\text{Вычитаем: } (2x + y) - (x + y) = 1 - (-1) \Rightarrow x = 2.$$

$$y = -1 - x = -1 - 2 = -3.$$

Точка пересечения: $(2, -3)$.

Шаг 2. Находим наклон прямой, перпендикулярной $l_1: x + 2y + 4 = 0$.

$$\text{Наклон } l_1: k_1 = -1/2.$$

$$\text{Перпендикулярный наклон: } k = -1/k_1 = 2.$$

Шаг 3. Уравнение искомой прямой через $(2, -3)$ с наклоном 2:

$$y - (-3) = 2(x - 2)$$

$$y + 3 = 2x - 4$$

$$2x - y - 7 = 0.$$

45. Given O is the coordinate origin, and A and B are two points on the plane, P is the midpoint of AB , then vector $\vec{OP} =$

- A. $(1/2)(\vec{OA} + \vec{OB})$
- B. $\vec{OA} + \vec{OB}$
- C. $\vec{OB} - \vec{OA}$
- D. $(1/2)(\vec{OB} - \vec{OA})$

Правильный ответ: A

Объяснение:

P — середина отрезка AB .

По правилу векторного сложения:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}.$$

Так как P — середина AB:

$$\vec{AP} = (1/2)\vec{AB} = (1/2)(\vec{OB} - \vec{OA}).$$

Подставляем:

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OA} + (1/2)(\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= \vec{OA} + (1/2)\vec{OB} - (1/2)\vec{OA} \\ &= (1/2)\vec{OA} + (1/2)\vec{OB} \\ &= (1/2)(\vec{OA} + \vec{OB}).\end{aligned}$$

46. If a complex number z satisfies $z^3 = 1$ and $z \neq 1$, then $1 + z + z^2 + \dots + z^{999} =$

- A. $(1 \pm \sqrt{3}i)/2$
- B. $(-1 \pm \sqrt{3}i)/2$
- C. 1
- D. i

Правильный ответ: C

Объяснение:

$z^3 = 1$ и $z \neq 1 \implies z$ является примитивным кубическим корнем из единицы.

Для таких z выполняется: $1 + z + z^2 = 0$.

Считаем сумму $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{999}$ (всего 1000 слагаемых: $z^0, z^1, \dots, z_{999}$).

Группируем по три: $1000 = 3 \times 333 + 1$.

333 полные группы: $(1 + z + z^2) \times 333 = 0 \times 333 = 0$.

Оставшийся член: $z_{999} = (z^3)^{333} = 1^{333} = 1$.

Итого: $0 + 1 = 1$.

47. Given an arithmetic sequence $\{a_n\}$ satisfies $3(a_2 + a_6) + 2(a_6 + a_{10} + a_{14}) = 24$, then $S_{13} =$

- A. 104
- B. 52
- C. 39
- D. 26

Правильный ответ: D

Объяснение:

Используем свойства арифметической прогрессии.

$a_2 + a_6 = 2a_4$ (симметрия относительно a_4).

$a_6 + a_{10} + a_{14} = 3a_{10}$ (для 3 членов среднее равно a_{10}).

Подставляем в условие:

$$3 \cdot 2a_4 + 2 \cdot 3a_{10} = 24$$

$$6a_4 + 6a_{10} = 24$$

$$a_4 + a_{10} = 4.$$

Находим S_{13} — сумма первых 13 членов:

$$S_{13} = 13/2 \cdot (a_1 + a_{13}) = 13 \cdot a_7 \text{ (средний член).}$$

$$a_7 = (a_4 + a_{10})/2 = 4/2 = 2.$$

$$S_{13} = 13 \cdot 2 = 26.$$

48. The Chinese zodiac, also known as Shēngxiào, are twelve animals used in China to represent years, in order: Rat, Ox, Tiger, Rabbit, Dragon, Snake, Horse, Goat, Monkey,

Rooster, Dog, and Pig. For example, people born in 1984, 1996, and 2008 were born in the Year of the Rat; people born in 1985, 1997, and 2009 were born in the Year of the Ox, and so on. The probability that at least two out of three randomly selected people share the same zodiac sign is

- A. 17/72**
- B. 1/12
- C. 55/72
- D. 143/144

Правильный ответ: A

Объяснение:

Используем дополнение: $P(\text{хотя бы 2 одинаковых}) = 1 - P(\text{все три разных})$.

Вычислим $P(\text{все три знака разные})$:

1-й человек: любой знак $\Rightarrow$ вероятность $12/12 = 1$.

2-й человек: другой знак $\Rightarrow$ вероятность $11/12$.

3-й человек: ещё другой знак $\Rightarrow$ вероятность $10/12$.

$P(\text{все разные}) = 1 \times (11/12) \times (10/12) = 110/144 = 55/72$.

Итого:

$P(\text{хотя бы 2 одинаковых}) = 1 - 55/72 = 17/72$.
